Julien Barthes
Gérard Colas des Francs

Mécanique

Licence
CPGE

- Cours développé
- Applications directes du cours
- Les points essentiels à retenir
- Exercices issus de recherches récentes et d'applications industrielles
- Les corrigés détaillés de tous les exercices

ellipses

Chapitre 1

Principe fondamental de la dynamique

Ce premier chapitre est consacré à la description des mouvements (cinématique du point) et à l'étude de l'effet des forces sur les mouvements (dynamique du point). Décrire un mouvement puis être capable de prédire son évolution est indispensable pour la navigation (maritime ou aérienne), concevoir des engins mécaniques (satellite, robot, montgolfière, ...), des capteurs (accéléromètre, géolocalisation, ...), réaliser des jeux vidéo ou des simulateurs réalistes (tracer et prédire la trajectoire d'une balle pour un jeu vidéo ou pour aider à l'arbitrage par exemple) ou encore pour déterminer une zone de sécurité autour d'un volcan en éruption (parabole balistique de sécurité). Décrire un mouvement nécessite de préciser sa position (à l'aide d'un repère) à un moment donné (notion d'horloge), ce qui conduit à la notion de référentiel (constitué d'un repère et d'une horloge). L'évolution d'un objet dépend des interactions avec son environnement, décrit à l'aide de forces. Nous illustrerons ces notions en nous appuyant sur des applications concrètes (géolocalisation, accélération d'une voiture, éruption volcanique, ...).

Les concepts de référentiel et de force peuvent sembler familiers mais il est important de les formaliser précisément et de savoir les manipuler. En particulier, nous verrons lors de chapitres ultérieurs que les notions de repère, horloge et force ne sont pas toujours définissables de manière indépendante. Ainsi, dans le chapitre 6 sur les référentiels non galiléens, nous définirons des pseudo-forces (ou forces d'inertie) telle que la force centrifuge qui ne décrivent pas des interactions entre des systèmes mais plutôt dépendent du choix du référentiel. De plus, dans le cadre de la relativité restreinte (chap. 11), la notion d'horloge absolue sera remise en cause, conduisant à la notion d'espace-temps.

Ainsi, au-delà d'être important pour manipuler les lois physiques et comprendre des phénomènes de la vie quotidienne, le cadre développé dans ce chapitre sera aussi utile pour mieux appréhender des systèmes plus complexes (monde de l'infiniment petit dans le cadre de la mécanique quantique, conservation de la quantité de mouvement et énergie relativiste nucléaire, *etc.*).

I. Cinématique

1 - Description du mouvement d'un point

a) Référentiel et repère

Pour décrire un mouvement, il faut pouvoir repérer un objet dans l'espace et le temps. Il faut donc se munir d'un repère spatial, mathématiquement formé par une origine et une base de vecteurs orthonormés, ainsi qu'une horloge. L'ensemble constitue alors un référentiel.

Définition

Un **référentiel** est constitué :

- d'un repère (système de coordonnées) associé à un solide ;
- d'une horloge pour définir l'instant correspondant à chaque position.

Le choix du référentiel permet de simplifier l'étude du mouvement. On essaiera par exemple d'associer le repère avec un solide considéré comme « immobile » par rapport au mobile étudié.

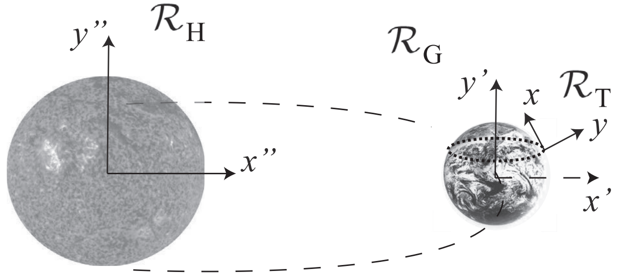


FIG. 1.1 – Référentiels usuels : terrestre, géocentrique, héliocentriques.

Pour étudier localement un mouvement d'un objet à la surface de la Terre, on utilisera le référentiel **terrestre** $\mathcal{R}_T$ (dit aussi de laboratoire) constitué d'une horloge et d'un repère avec comme origine un point à la surface de la Terre (là où se déroule le phénomène) qui tourne avec la Terre sur 24 h (cf. fig. 1.1).

Pour discuter de mouvements sur de grandes distances (avion long courrier, mouvement de satellites...), on utilisera le référentiel **géocentrique** $\mathcal{R}_G$ constitué d'une horloge et d'un repère ayant pour origine le centre de la Terre et un système de coordonnées définies comme trois vecteurs pointant vers 3 étoiles très éloignées (donc supposées fixes).

Enfin pour discuter de mouvements de planètes, on utilisera le référentiel **héliocentrique** $\mathcal{R}_{\mathrm{H}}$ constitué d'une horloge et d'un repère ayant pour origine le Soleil et un système de coordonnées cartésiennes définies comme trois vecteurs pointant vers 3 étoiles très éloignées.

Remarque

Les systèmes de géolocalisation (GPS, Galiléo) utilisent des pulsars pour repérer la position des satellites. Les pulsars (ou étoiles à neutron) sont des étoiles en rotation émettant de la lumière à intervalle régulier (sorte de "phare de l'espace"). Il a été proposé d'utiliser les pulsars comme repère mais aussi comme horloge constituant un référentiel complet (cf. fig. 1.2) afin d'aider les futurs navigateurs spatiaux.

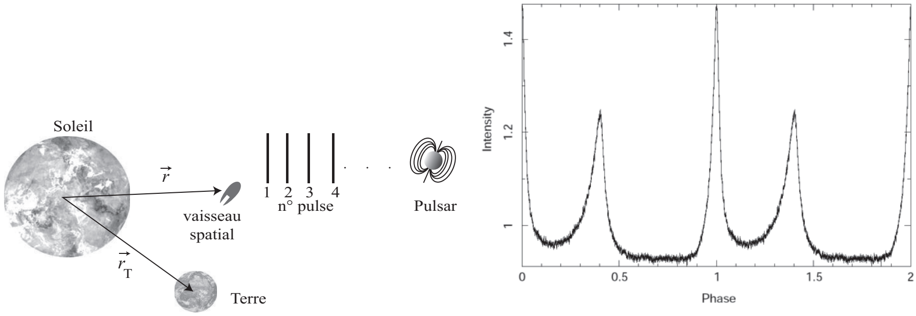


FIG. 1.2 – Référentiel complet utilisant des pulsars et allure de l'intensité du Pulsar de la nébuleuse du Crabe de période 33,403 347 409 4 ms, (*d'après Spacecraft Navigation Using X-ray Pulsars, NRL Review, 2006*). La dérive de sa période est de l'ordre de $5 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{s} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ soit 40 ns/jour !

Pour des mouvements non relativistes, on peut considérer un temps absolu. Le concept d'horloge mérite par contre une attention toute particulière dans le cadre de la relativité.

Remarque

Les trajectoires des satellites GPS sont très bien décrites dans le cadre de la mécanique relativiste (vitesse de l'ordre de $4\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{s}^{-1}$). Les corrections relativistes sur les horloges par rapport à la mécanique classique sont de l'ordre de $\Delta t = 40\,\mu\mathrm{s}$/jour ce qui correspond à $c\Delta t =$12 km/jour.

Pour décrire le mouvement d'un point, on utilise un repère qui mathématiquement est un système de coordonnées. Usuellement, on choisit un repère adapté au type de mouvement. Dans les cas usuels simples, le mouvement peut être décrit par une seule variable (distance le long d'une route, angle d'un pendule, ...).

b) Repère cartésien

Définition

Un point M est repéré par ses coordonnées **cartésiennes** $M(x,y,z)$. Le vecteur position est alors défini par :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

En coordonnées cartésiennes, décrire le mouvement du point M revient à connaître les différentes valeurs de sa position à chaque instant, c'est-à-dire les fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.

On peut aussi écrire en les composantes des vecteurs sous forme d'une colonne (forme pratique pour faire des produits scalaires ou produit vectoriel). Les vecteurs de la base ne sont généralement pas précisés puisqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

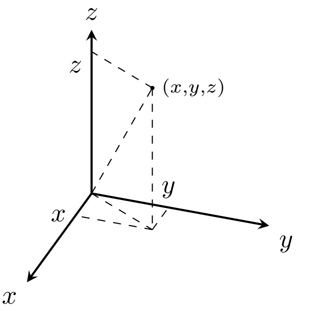
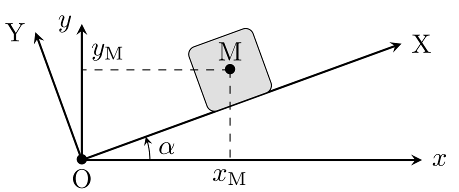


FIG. 1.3 – Repère cartésien.

$$\overrightarrow{OM} = \left| \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right.$$

Exemple



On considère le glissement d'un solide sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontal, selon le schéma ci-contre.

1 - Dans le repère OXY, que peut on dire du mouvement du solide ?

2 - En considérant le solide ponctuel de coordonnées $(X(t),0)$, déterminer les équations de la position du point $M(x_M,y_M)$ en fonction de $X(t)$. Conclure sur le choix du repère.

Pour s'entraîner : exercice 1.3

1 - Dans le repère OXY, il s'agit d'un mouvement de translation selon X.

2 - Dans le repère Oxy, les liens entre les coordonnées sont :

$$x_M(t) = X(t)\cos\alpha \quad \text{et} \quad y_M(t) = X(t)\sin\alpha$$

Le repère Oxy n'est pas adapté à la description du mouvement puisqu'il est nécessaire d'utiliser deux variables (x_M,y_M) au lieu d'une seule dans le repère OXY.

c) Repère cylindrique

Pour des mouvements de rotation, on préfèrera utiliser les coordonnées **cylindriques**. L'axe Oz est alors placé selon l'axe de rotation. La position d'un point de l'espace est décomposée selon se composante selon Oz et son projeté H dans le plan Oxy. La position de H est repéré par

- r, sa distance au centre O ;
- et θ, l'angle formé par OH et l'axe Ox (cf. fig. 1.4).

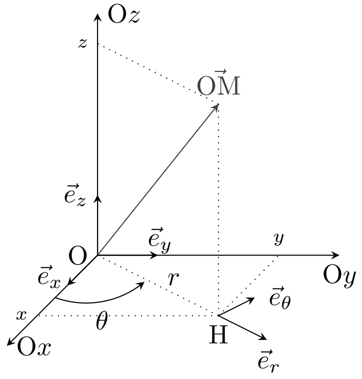


FIG. 1.4 – Repère cylindrique.

Les vecteurs du repère cylindrique sont le vecteur radial $\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{\text{OH}}}{||\overrightarrow{\text{OH}}||}$; le vecteur orthoradial $\vec{e}_\theta$ et le vecteur longitudinal $\vec{e}_z$ complétant la base directe $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

Définition

Un point M est repéré par ses coordonnées cylindriques M(r,θ,z). On définit le vecteur position par :

$$\overrightarrow{\text{OM}} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$

où $r = \text{OH}$ avec H le projeté orthogonal de M dans le plan Oxy.

Remarque

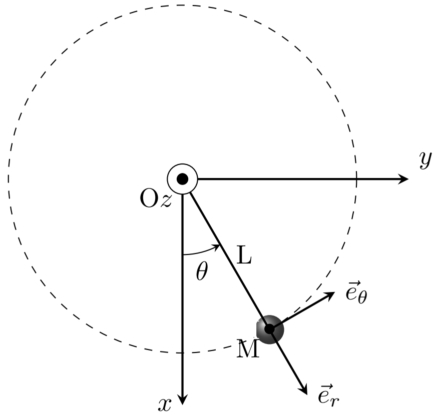
La description de la position ne possède pas de composante selon $\vec{e}_\theta$.

Dans les cas simples où le mouvement est plan, on utilise les coordonnées **polaires** (r,θ). L'altitude z est la même que dans le repère cartésien.

Exemple

Parmi les entraînements des astronautes, la centrifugeuse consiste à faire tourner le candidat sur un cercle de taille L dans le plan Oxy.
1 - Par quelle(s) variable(s) est décrit le mouvement dans le repère polaire.
2 - Écrire les coordonnées du point M dans le repère Oxy en fonction de θ et L. Conclure sur l'intérêt du repère polaire.

© *ESA*



1 - Effectuons un schéma vu du dessus de la centrifugeuse. Dans le repère polaire, le mouvement d'un point est repéré par ses coordonnées (r,θ). Ici, la variable r est constante ($r = \mathrm{L}$). On en déduit que le mouvement est décrit par une unique variable $\theta(t)$.
2 - Dans le repère Oxy, les coordonnées du point M sont :

$$x_\mathrm{M} = \mathrm{L}\cos\theta \quad \text{et} \quad y_\mathrm{M} = \mathrm{L}\sin\theta$$

Pour décrire le mouvement, il est alors nécessaire de connaître deux variables dans le repère Oxy : $x(t)$ et $y(t)$, contre une seule en coordonnées polaires : $\theta(t)$ [1].

2 - Vitesse et accélération

a) Repère cartésien

Dans le repère cartésien, l'obtention de la vitesse et de l'accélération est immédiat. Il suffit de dériver la position du point M selon les trois coordonnées.

Vecteur vitesse

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt} = \left|\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{array}\right.$$

Vecteur accélération

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left|\begin{array}{l} \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \\ \frac{d^2z}{dt^2} \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{array}\right.$$

b) Repère cylindrique

Dans le cas du repère cylindrique, il faut tenir compte que les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ dépendent du temps et que leur dérivée est donc non nulle. Les détails des calculs sont en annexe A.3.

Propriété

La dérivée temporelle des vecteurs polaires s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\vec{e}_r$$

Pour se souvenir de ces formules, on peut remarquer que la dérivée d'un vecteur polaire correspond à la rotation de 90 degrés dans le sens trigonométrique du vecteur, multipliée par $\dot{\theta}$.

1. ⚠ $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{L}\vec{e}_r$ mais $\vec{e}_r$ dépend de l'angle θ.

Vecteur vitesse Le vecteur vitesse se déduit par dérivation du vecteur position. On utilise les propriétés de dérivation de produit de fonction[2] :

$$\frac{\mathrm{d}r(t) \times \vec{e}_r(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} \times \vec{e}_r(t) + r(t) \times \frac{\mathrm{d}\,\vec{e}_r(t)}{\mathrm{d}t}$$

On obtient :

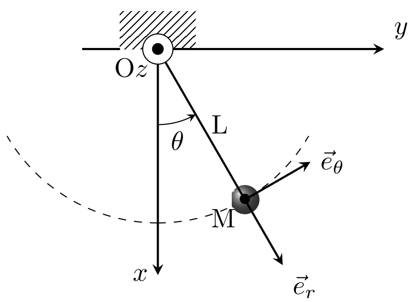
$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r\vec{e}_r + z\vec{e}_z\right) = \dot{r}\vec{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} + \dot{z}\vec{e}_z \\ &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z \\ &= \left| \begin{array}{c} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{array} \right. \end{aligned}$$

De la même façon, le calcul de l'accélération s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z\right) \\ &= (\ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta) + [\dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{r}\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\vec{e}_r)] + \ddot{z}\vec{e}_z \\ &= \left| \begin{array}{c} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + \dot{r}\ddot{\theta} \\ \ddot{z} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Exemple

On considère un pendule de taille L, oscillant autour de Oz, dans le plan Oxy.
1 - Déterminer l'expression de la vitesse du pendule en fonction de $\dot{\theta}$ et L.
2 - En déduire l'expression de son accélération en fonction de $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$ et L.



Pour s'entraîner : exercices 1.2, 1.8

1 - La position est donnée par $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{L}\,\vec{e}_r$. La dérivation du vecteur $\vec{e}_r$ donne : $\vec{v}(t) = \mathrm{L}\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$.
2 - En dérivant le produit de fonction du temps $\dot{\theta}(t) \times \vec{e}_\theta(t)$, on obtient l'accélération :

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \mathrm{L}\big(\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\,\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t}\big) \\ &= \mathrm{L}\big(\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{\theta}(-\dot{\theta}\,\vec{e}_r)\big) \\ &= -\mathrm{L}\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r + \mathrm{L}\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta \end{aligned}$$

2. La dérivée est identique à celle d'un produit de fonction : $(u\ \vec{v})' = u'\vec{v} + u\ \vec{v}\,'$.

Remarque

En robotique, des chercheurs étudient la cinématique des membres humains qui possèdent de nombreux degrés de liberté. La décomposition d'un mouvement dépend alors de nombreuses variables qui sont manipulées par des matrices. La réalisation de robots aux mouvements très fluide est alors possible (cf. fig. 1.5).

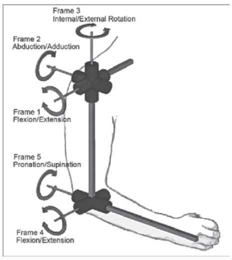


Fig. 1.5 – Diagramme cinématique des degrés de liberté d'un bras, *d'après Dynamic biomechanical model for assessing and monitoring robot-assisted upper-limb therapy, J. Rehabil. Res. Dev.* **44**, *43 (2007).* Robot Nao (*photo de Mentagi*) et QR-code vers Atlas de Boston Dynamics (2020).

3 - Mouvements particuliers

On se limite ici aux mouvements rectilignes, les mouvements oscillants et de rotation sont traités dans les chapitres 3 et 7.

a) Mouvement rectiligne

Définition

Un mouvement **rectiligne** est évidemment défini par la nature de la trajectoire du mobile qui est une droite. Le mouvement peut être décrit par :

$$\vec{\mathrm{OM}} = x(t)\,\vec{e}_x$$

Dans ce cas, la direction du vecteur vitesse est constante.

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x(t)\overrightarrow{u}_x$$
$$\overrightarrow{v} = \dot{x}\overrightarrow{u}_x$$
$$\overrightarrow{a} = \ddot{x}\overrightarrow{u}_x$$

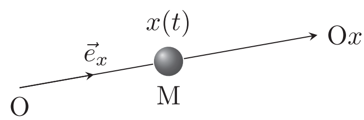


Fig. 1.6 – Mouvement rectiligne.